Donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$(b-a)f'(a) \le f(b)-f(a) \le f'(b)(b-a)$

$\Rightarrow \frac{(b-a)}{\cos^2 a} \le \tan(b)-\tan(a) \le \frac{(b-a)}{\cos^2 b}$

2°/Soit $g(x)=\sqrt{x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} < 0$

Donc g' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $\alpha > 0$, $a \le x \le a+1 \Rightarrow g'(a+1) \le g'(x) \le g'(a)$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{(a+1)}} \le g'(x) \le \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$\begin{cases} g \text{ est dérivable sur } [a,a+1] \\ \forall x \in]0,+\infty[, \frac{1}{2\sqrt{(a+1)}} \le g'(x) \le \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{cases}$ d'où $\frac{1}{2\sqrt{(a+1)}} \le \sqrt{(a+1)}-\sqrt{a} \le \frac{1}{2\sqrt{a}}$

3°/Soit $h:[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}], x \mapsto \cot g x$

h est dérivable sur $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$,

$h'(x) = -1-\cot g^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$

h' est dérivable sur $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$,

$h''(x) = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} \ge 0$

Donc h' est strictement croissante sur $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow$